پاسخ تشریحی کوییز شماره ی ۳۹

ریاضی عمومی ۱و۲

استاد شکرزاد

تست ۱
(۳)

حجم حاصل از دوران یک ناحیه حول محور xها را با کمک روش دیسک تعیین می‌کنیم.

روش دیسک : $V_{ox} = \pi \int_{x=0}^{a} f^2(x)\,dx = a^2 + a$

معادله فوق یک معادله انتگرالی است (تابع $f(x)$ مجهول است که تحت انتگرال قرار دارد) ، برای حل این معادله از مشتق گیری طرفین نسبت به a استفاده می‌کنیم.

$$\xrightarrow{d/da} \pi\left(f^2(a)\right) = 2a+1 \longrightarrow f^2(a) = \frac{2a+1}{\pi}$$

$$\longrightarrow f(a) = \sqrt{\frac{2a+1}{\pi}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{\pi}}$$

تست ۲
(۴)

شرط مشتق پذیری در نقطه پیوستگی و برابری مشتق چپ و راست است.

$$\xrightarrow[\text{شرط پیوستگی}]{x_0=b} \begin{cases} f(b) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \overset{\text{ضابطه اول}}{=\!=} -\frac{b^2}{2} + a \\ f(b^+) \overset{\text{ضابطه دوم}}{=\!=} \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow -\frac{b^2}{2} + a = \frac{1}{b} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \begin{cases} -x & x < b \\ -\frac{1}{x^2} & x > b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'_-(b) = -b \\ f'_+(b) = -\frac{1}{b^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -b = -\frac{1}{b^2} \Rightarrow b^3 = 1 \longrightarrow \boxed{b=1} \xrightarrow{(*)} -\frac{1}{2} + a = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

تست ۳

(۳)

ابتدا کران انتگرال را π واحد به عقب شیفت می‌کنیم.

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{37-12\cos(\pi+x)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{37+12\cos x}$$

ربع سوم $(\cos<0)$ — متقارن — زوج

$$\Rightarrow I=2\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{37+12\cos x}$$

گویاسازی

$$\xrightarrow{z=\tan\frac{x}{2}} I=2\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{37+12\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}=4\int_{0}^{\infty}\frac{dz}{\underbrace{49+25z^2}_{25\left(\frac{49}{25}+z^2\right)}}$$

$$\longrightarrow I=\frac{4}{25}\int_{0}^{\infty}\frac{dz}{\frac{49}{25}+z^2}=\frac{4}{25}\left(\frac{1}{7/5}\tan^{-1}\frac{z}{7/5}\right)\Big|_{0}^{\infty}$$

$$\Rightarrow I=\frac{4}{35}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{2\pi}{35}$$

تست ۴

(۴)

انتگرال مسئله یک انتگرال سطح نوع دوم است که چون مرز ناحیه بسته نیست از روش مستقیم برای محاسبه آن استفاده می‌کنیم.

$$S:\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ \overset{\wedge 2}{\Longrightarrow}\ x^2+y^2-z^2=0\ \xrightarrow{①}\ \vec{n}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}=\pm\frac{(2x,2y,-2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}$$

② $ds_{\text{مخروط } 45^\circ}=\sqrt{2}\,dA$

③ تصویر ناحیه روی xoy : $1\leq x^2+y^2\leq 4$ $\xleftarrow[z=1,\ z=2]{z=\sqrt{x^2+y^2}}$ تلاقی

$$I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_D \underbrace{(x,y,z^2)\cdot\frac{(2x,2y,-2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\sqrt{2}\,dA}_{\uparrow\; z=\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow I=\iint_{1\leq x^2+y^2\leq 4}(x,y,x^2+y^2)\cdot\frac{(x,y,-\sqrt{x^2+y^2})}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}}\cancel{\sqrt{2}}\,dA$$

$$\Rightarrow I=\iint_D \frac{x^2+y^2-(x^2+y^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$$

$$\Rightarrow I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\,dA \xrightarrow{\text{تبدیل قطبی}} I=\int_0^{2\pi}\int_1^2 (r-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow I=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_1^2 (r^2-r^3)\,dr\right)=(2\pi)\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_1^2=-\frac{17\pi}{6}$$

تست ۵ (۱) سطح S همان صفحه خواهد بود و تصویر آن روی صفحه مختصات (xoy) همان بیضی است.

$\hookrightarrow D:\ x^2+\frac{y^2}{1/4}=1$

$$\begin{cases} \text{مساحت رویه}:\ S=\iint_S ds \\ S:\ 2x-2y+z=4 \Rightarrow S:\ z=4-2x+2y \Rightarrow ds=3\,dA \end{cases}$$

$$S=\iint_S ds=\iint_D 3\,dA=3S_D=3(\text{مساحت بیضی})=3(\pi)(1)\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

تست ۶

(۳)

چون تابع تحت انتگرال و ناحیه انتگرال‌گیری مستقل هستند، داریم:

$$I = \left(\int_0^1 e^y \, dy\right)\left(\int_0^\pi \sin x \, e^{\cos x} \, dx\right)$$

$$\Rightarrow I = \left(e^y\right)\Big|_0^1 \left(-e^{\cos x}\right)\Big|_0^\pi = (e-1)(-e^{-1}+e)$$

$$\Rightarrow I = -1 + e^2 + e^{-1} - e$$